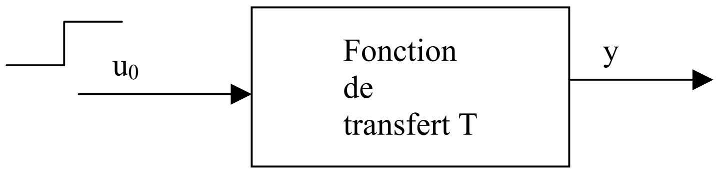
Modélisation et identification des systèmes

Chapitre 2 Méthodes d'analyse transitoire de l'identification

Elles s'appliquent aux systèmes pour lesquels on recherche un modèle linéaire. Elles utilisent les analogies entre les résultats d'expériences et les solutions d'équations afin de choisir une structure à priori pour le modèle.

I Réponse indicielle, définition

Le plus souvent on cherche à caractériser la fonction de transfert d'un système que l'on veut automatiser.
Cette méthode ne peut pas servir à identifier les paramètres physiques du système (ce n'est pas une modélisation interne).
On applique un échelon d'amplitude u_0 au système.
On observe la réponse et on fait un choix sur la structure de la fonction de transfert ou de l'équation différentielle.



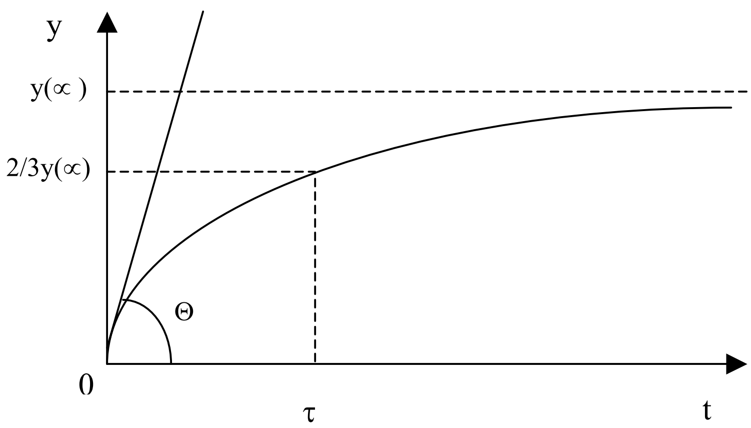
La forme de la réponse permet de dire si le système se rapproche d'un premier, deuxième ordre ou d'un ordre supérieur.

II Système du premier ordre

$y_0(t)$ est d'allure exponentielle, on va essayer un modèle du premier ordre.

$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku$ K et τ sont les constantes à identifier.

La solution est $y(t) = Ku(1 - e^{-t/\tau})$
Si $t \to +\infty$ $y(\propto) = Ku_0$ Permet d'identifier K graphiquement



Et $tg\Theta = Ku_0/\tau$

Il est de fait difficile d'obtenir la tangente à l'origine graphiquement.

<u>Cas particuliers</u> :

1) On dispose d'un enregistrement discret (échantillonné) ou discrétisé.

$$y(t+\Delta t)=Ku_0(1-e^{-\frac{t+\Delta t}{\tau}})$$

$$y(t+\Delta t)-y(t)=Ku_0e^{-\frac{t}{\tau}}(1-e^{-\frac{\Delta t}{\tau}})$$

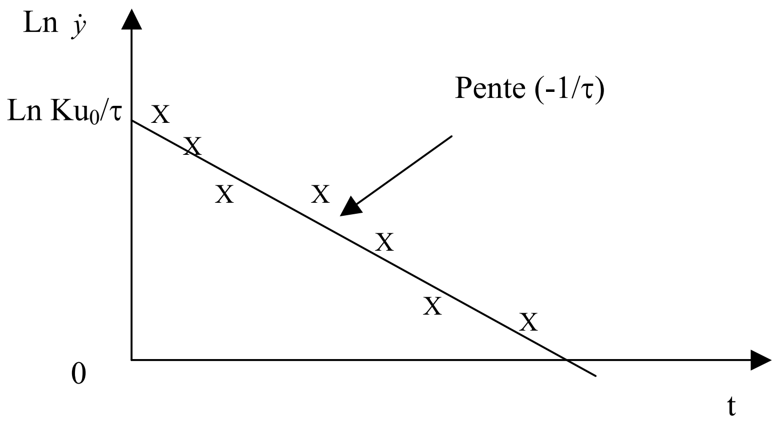
Si $\Delta t/\tau$ est petit (période d'échantillonnage << constante de temps du système)

$$e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}\approx 1-\frac{\Delta t}{\tau}$$

$$y(t + \Delta t) - y(t) \# Ku_0e^{-t/\tau}\Delta t/\tau$$

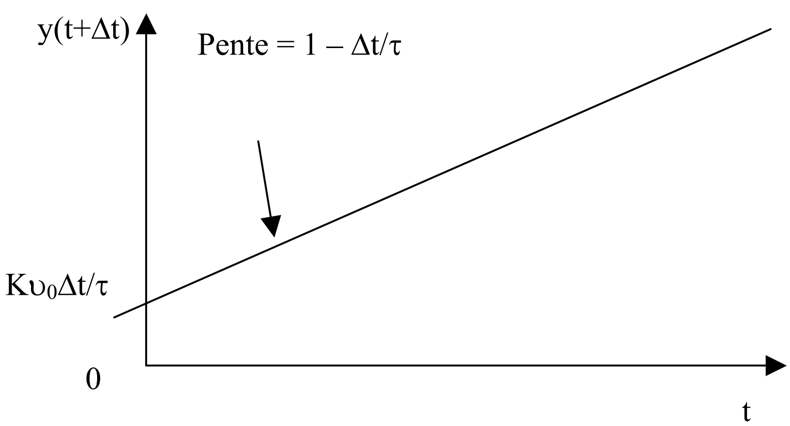
$$Ln\left(\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)=Ln\frac{Ku_0}{\tau}-\frac{t}{\tau} \qquad \Delta t/\tau << 1$$

On obtient alors graphiquement K et τ.



2) On discrétise l'équation différentielle

$$\tau dy + y = Ku_0dt \Rightarrow$$
$$\tau/\Delta t\ y(t + \Delta t) + y(t)\ (1- \tau/\Delta t) = Ku_0(t)$$



$y(t + \Delta t) = K\, u_0 /\tau\ \Delta t - y(t)\ (1 - \tau /\Delta t)\ \Delta t / \tau$
$= K\, u_0 /\tau\ \Delta t + y(t)\ (1- \Delta t /\tau)$ si $\Delta t / \tau << 1$

III Système du second ordre

Selon que la réponse est apériodique (constantes τ_1 et τ_2 différentes) ou oscillatoire amortie, on choisira le modèle sous la forme :

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+y=Ku_0$$

$$\tau_1\tau_2\frac{d^2y}{dt^2}+(\tau_1+\tau_2)\frac{dy}{dt}+y=Ku_0$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_n}\frac{dy}{dt}+y=Ku_0$$ m < 1 amortissement, ω_n pulsation propre

1^er cas : si τ_1 est très différent de $\tau_2 \Rightarrow$ Il existe des méthodes spécifiques, mais on utilisera plutôt la méthode de Strejc (voir plus loin).
2^ème cas : Dans le cas oscillatoire, on utilise des abaques pour identifier ω_n et m. K est obtenu par examen du régime permanent $y(\infty)$;

IV Identification d'un système à réponse apériodique d'ordre quelconque : méthode de Strejc Quentin.

IV.1 Position du problème

C'est une méthode de recherche de modèles pour un système d'ordre quelconque permettant de déterminer approximativement la transmittance du système considéré, à partir de la réponse du système à un échelon.
On fait correspondre la réponse à un échelon du modèle et du système en des points particuliers :

- L'origine,
- Le point à l'infini (régime permanent),
- Le point d'inflexion de la réponse,
- La tangente au point d'inflexion.

Cela entraîne la définition d'un critère mesurant l'écart entre le système et son modèle pour la réponse à un échelon.

IV.2 Méthode de Strejc

On suppose que le système est d'ordre supérieur à 2.
On peut vérifier expérimentalement que la réponse d'un tel système (ordre n) peut être représentée par une transmittance de la forme suivante :

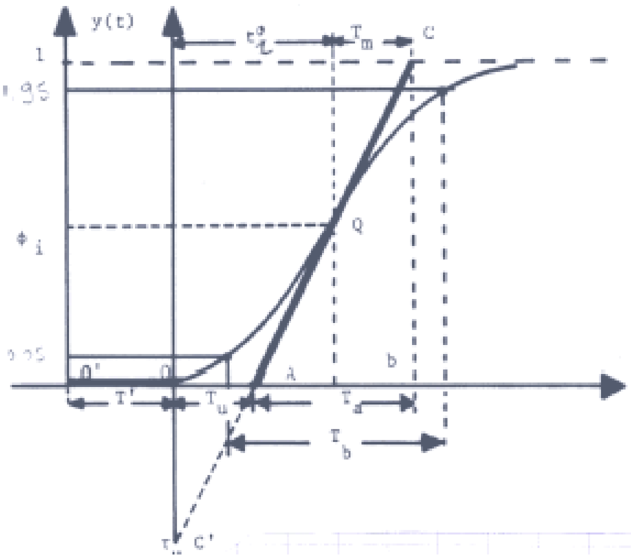
$$G(p)=K\frac{e^{-T'p}}{(1+Tp)^n}$$ avec

K = gain statique,
T = constante de temps

T' = retard pur

Le système est normalisé en divisant la réponse par la valeur en régime permanent y (∞) = au_0.

a) le système ne possède pas de retard pur



La tangente au point d'inflexion coupe l'axe des abscisses en T_u, l'asymptote (régime permanent y(∞)=1) en $t_i + T_m$ et l'axe des ordonnées en τ_u. On a les relations :

$T_m = T_b - t_i = T_a(1 - \Phi_i)$
$\tau_u = T_u / T_a$

et on peut lier les relations entre ces paramètres et les quantités n et T à l'aide du tableau suivant.

n	T_a/T	T_u/T	T_u/T_a	t_i/T	Φ_i	T_m/T	T_m/T_a
1	1	0	0	0	0	1	1
2	2,718	0,282	0,104	1	0,264	2,000	0,736
3	3,695	0,805	0,218	2	0,323	2,500	0,677
4	4,463	1,425	0,319	3	0,353	2,888	0,647
5	5,119	2,100	0,410	4	0,371	3,219	0,629
6	5,699	2,811	0,493	5	0,384	3,510	0,616
7	6,226	3,549	0,570	6	0,394	3,775	0,606
8	6,711	4,307	0,642	7	0,401	4,018	0,599
9	7,164	5,081	0,709	8	0,407	4,245	0,593
10	7,590	5,869	0,773	9	0,413	4,458	0,587
11	7,98	6,650	0,835	10	0,417	4,68	0,582
12	8,32	7,59	0,880	11	0,419	4,83	0,578
13	8,69	8,25	0,938	12	0,422	5	0,572
14	9,03	9,05	0,983	13	0,424	5,17	0,566
15	9,28	9,88	1,20	14	0,426	5,36	0,562

Les quantités Φ_i et T_u / T_a ne dépendent pas de T. on peut donc ainsi déterminer l'ordre du modèle. On a aussi dans les triangles AbC et AOC' :

$T_u / T_a = \tau_u / 1$

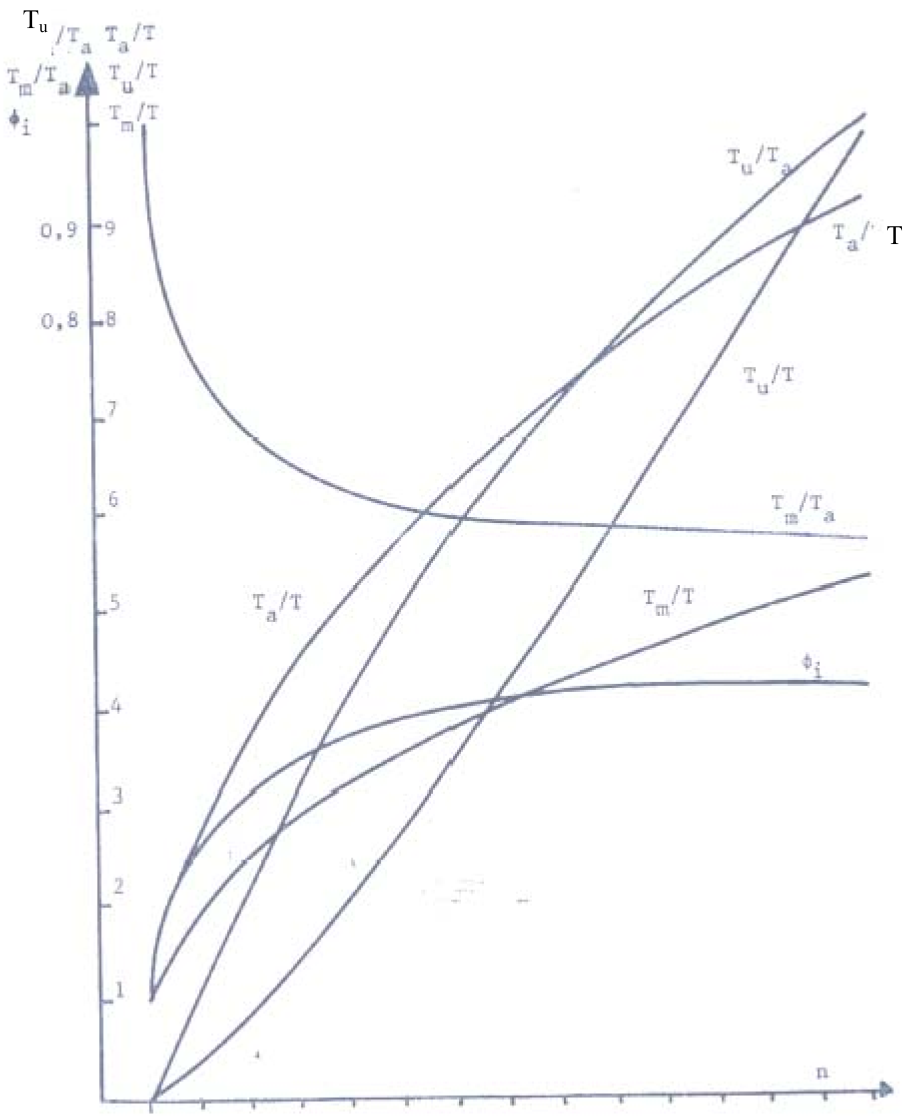
Et approximativement sur le tableau :

Si n < 7 $\quad T_u / T_a = (n-1) / 10$

Utilisation du tableau

Sur le graphique, on détermine le point d'inflexion et on trace la tangente en ce point. On obtient ainsi T_u, T_a et T_u / T_a

Le rapport T_u / T_a sert à déterminer n et T_a / T et donc T.
Si le rapport T_u / T_a ne correspond pas à une valeur exacte du tableau pour n, on prend la valeur de n immédiatement inférieure et on introduit un temps mort (temps de retard)
$T' = T_u - T_u'$, T_u relevée dans le tableau correspondant au n choisi (ou sur le diagramme).



La réponse est alors de la forme :

$$G(p) = \frac{e^{-T'p}}{(1+Tp)^n}$$

Exemple :

$$G(p)=\frac{1}{(1+p)(1+2p)(1+3p)(1+4p)}$$

En relevant la réponse à un échelon d'un tel système, on trouve :

$T_u = 2{,}9s$ $\quad T_a = 11{,}1s$ $\quad T_u / T_a = 0{,}261$

On prend donc n = 3 et on cherche $T' = T_u - T_u'$.
Le tableau donne $T_u' / T_a = 0{,}218$ et $T_u' = 2{,}41s$ (0,218 * 2,41)
Et T' = 2,9 – 2,41 = 0,49 s
N=3 $\Rightarrow$ $T_a / T = 3{,}695$ et $T_a = 11{,}1s$ donc T = 3s

Le modèle est

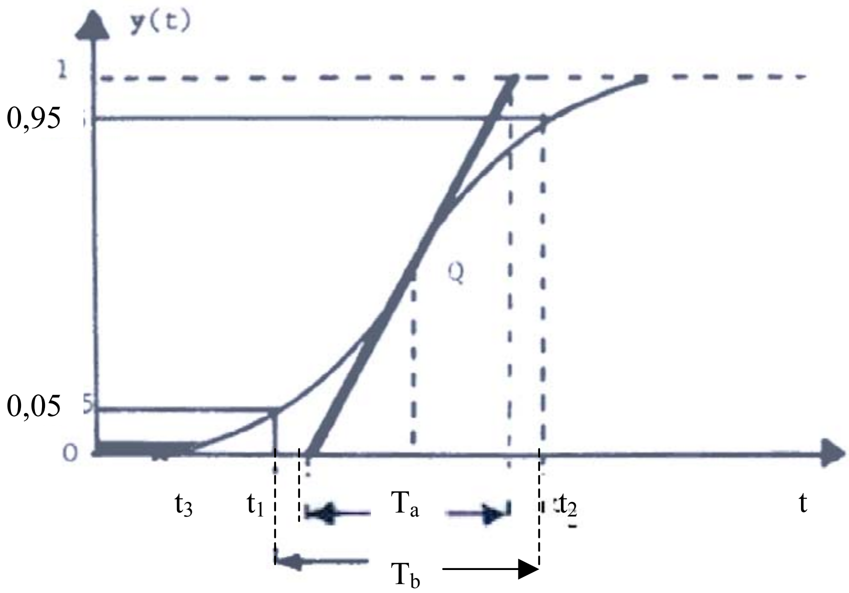
$$G(p)=\frac{e^{-0,49p}}{(1+3p)^3}$$

Remarque :
Si $T_u < 0{,}1$ on assimilera le système à un second ordre apériodique et on prendra sur la courbe de réponse deux points t_1 et t_2 et on déterminera la transmittance :

$$G'(p)=\frac{1}{(1+T_1\,p)(1+T_2\,p)}$$

b) Extension mesure du retard.

Manque de précision de la méthode précédente due au manque de précision dans le démarrage de la courbe. On va se baser sur l'étude de la courbe de réponse entre 5% et 95% de l'évolution finale.
On prend 2 points $y(t_1)=0{,}05 \;\; et \;\; y(t_2)=0{,}95 \;\; et \;\; T_b = t_2 - t_1$



Si le retard pur est nul ($t_3 = 0$), la réponse de $G(p) = \frac{1}{(1+Tp)^n}$ à un échelon unitaire est :

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}\left\{1 + \frac{t}{T} + ... + \left(\frac{t}{T}^{n-1}\right)\frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

On peut écrire en t_1

$$y(t_1) = 1 - e^{-\hat{y}}\left\{1 + \hat{y} + ... + \hat{y}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right\} = 0{,}05 \quad \text{avec } \hat{y} = \frac{t_1}{T} \text{ fonction de n}$$

La relation précédente permet d'obtenir t_1 en fonction de n.

De la même manière on a :

$$y(t_2) = 1 - e^{-z}\left\{1 + z + ... + (z)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right\} = 0{,}95 \qquad \text{avec } z = \frac{t_2}{T} \text{ z fonction de n}$$

et $\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{T_b}{T} = \hat{y} - z \Rightarrow T_b = T(\hat{y} - z)$

On a aussi $Ta = \frac{(n+1)!e^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}T$

$\frac{Ta}{Tb}$ est indépendant de T et ne dépend que de n.

Les paramètres Ta et Tb se détermine sans connaître l'origine, on peut alors déterminer expérimentalement le retard pur du système s'il existe.

$\frac{Ta}{Tb} \Rightarrow n$ et n et $Ta \Rightarrow T$. On reporte sur la courbe initiale un segment $t_1t_3 = \hat{y}T$ .si t_3 n'est pas confondu avec l'origine O, il existe un retard pur $\tau = Ot_3\ (Ot_3 = Ot_1 - t_1t_3)$

<u>V Analyse fréquentielle</u>

<u>V.I.Introduction</u>

x(t) est un signal sinusoïdal dont on fait varier la fréquence, on mesure y(t) lorsque le système est stabilisé. y(t) est un signal de même fréquence que x(t)

A chaque $f \rightarrow \left.\begin{matrix} amplitude \\ phase \end{matrix}\right\} de\ y(t)$.

V.2. Méthode de Kardachov-Karniuchine

La caractéristique expérimentale est donnée par

$$G_e\left(j\omega_i\right) = R\left(\omega_i\right) + jI\left(\omega_i\right)$$

Le modèle choisi est la forme $G\left(j\omega\right) = \dfrac{\sum_{\upsilon=0}^{m} b\upsilon\left(j\omega\right)^{\upsilon}}{1+\sum_{\upsilon=1}^{n} a_{\upsilon}\left(j\omega\right)^{\upsilon}} m < n$

pour calculer les constantes $a_\upsilon\ et\ b_\upsilon$ du modèle, on a les équations suivantes :

$$G_e\left(j\omega_i\right) = G\left(j\omega_i\right) i \in \left(1, N\right)$$

On pose $G\left(j\omega_i\right) = \dfrac{u_1\left(\omega_i\right) + jv_1\left(\omega_i\right)}{u_2\left(\omega_i\right) + jv_2\left(\omega_i\right)}$

On obtient les relations suivantes :

1) $$\begin{cases} u_1\left(\omega_i\right) = b_0 - b_2\omega_i^2 + b_4\omega_i^4 ...... \\ u_2\left(\omega_i\right) = 1 - a_2\omega_i^2 + a_4\omega_i^4 ...... \\ v_1\left(\omega_i\right) = b_1\omega_i - b_3\omega_i^3 + b_5\omega_i^5 ...... \\ v_2\left(\omega_i\right) = a_1\omega_i - a_3\omega_i^3 + a_5\omega_i^5 ...... \end{cases}$$

En tenant compte de $G_e\left(j\omega_i\right) = G\left(j\omega_i\right)$

2)

$$u_1(\omega_i) - u_2(\omega_i)R(\omega_i) + v_2(\omega_i)I(\omega_i) = 0$$

$$v_1(\omega_i) - u_2(\omega_i)I(\omega_i) - v_2(\omega_i)R(\omega_i) = 0$$

Si n+m est pair il faut les coordonnées de $i = \dfrac{n+m}{2}$ points de la caractéristique fréquentielle.

On obtient $n+m$ équations linéaires pour les coefficients recherchés,

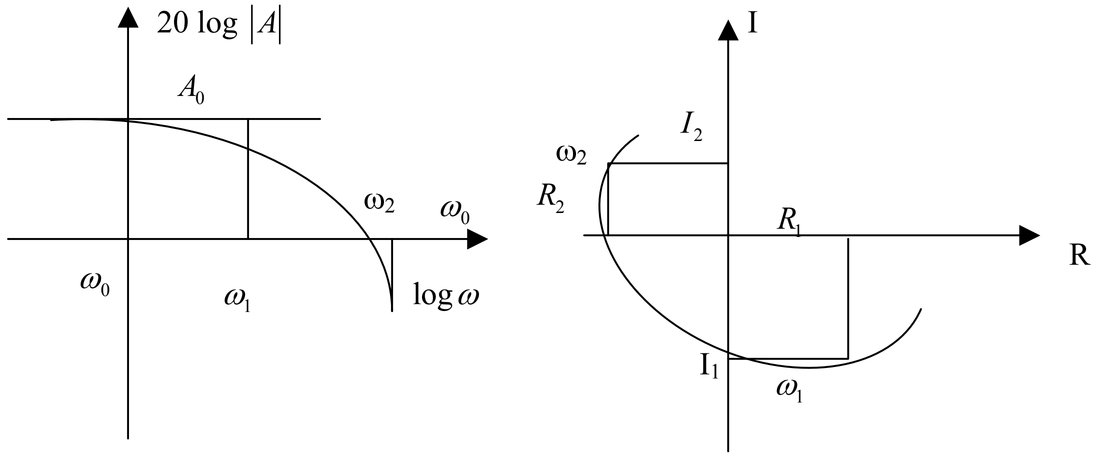
a_υ (υ = 1, 2,...., n)
b_υ (υ = 1, 2,...., m)

et b_0 égal à $G_e(0)$, gain statique du système.

Exemple :

$$G(p)=\frac{b_0+b_1p}{1+a_1p+a_2p^2+a_3p^3}$$

n=1, m=3, n+m = 4. 2 points sont donc nécessaires pour obtenir les cinq paramètres : b_0, b_1, a_1, a_2, a_3,
b_0 est mesuré à priori.



$$1)\Rightarrow\begin{cases}u_1=b_0 & v_1=b_1\omega_i\\ u_2=1-a_2\omega_i^2 & v_2=a_1\omega_i-a_3\omega_i^3\end{cases}$$

2) $\Rightarrow$

$$2)\begin{cases}-a_1\omega_1I_1-a_2\omega_1^2R_1+a_3\omega_1^3I_1=b_0-R_1 & a)\\ -a_1\omega_2I_2-a_2\omega_2^2R_2+a_3\omega_2^3I_2=b_0-R_2 & b)\\ a_1\omega_1I_1-a_2\omega_1^2I_1+a_3\omega_1^3R_1-b_1\omega_1=-I_1 & c)\\ a_1\omega_2R_2-a_2\omega_2^2I_2-a_3\omega_2^3R_2-b_1\omega_2=-I_2 & d)\end{cases}$$

On pose $R(\omega_i)=R_i \quad I(\omega_i)=I_i$

$$\begin{array}{r}a)\times R_1+c)\times I_1\\ b)\times R_2+d)\times I_2\\ c)\times R_1-a)I_1\\ d)\times R_2-b)\times I_2\end{array}\begin{cases}a_2\omega_1^2R_1^2+b_1\omega_1I_1=R_1^2-b_0R_1\\ a_2\omega_2^2R_2^2+b_1\omega_2I_2=R_2^2-b_0R_2\\ a_1\omega_1R_1^2-a_3\omega_1^3R_1^2-b_1\omega_1R_1=b_0I_1\\ a_1\omega_2R_2-a_3\omega_2^3R_2^2-b_1\omega_2R_2=-b_0I_2\end{cases}$$

On a donc 4 équations à 4 inconnues

On cherche après à optimiser le modèle soit à rendre $\sum_{i=1,j=1}^{n,m} \left| G\left(....a_i, ...b_j ......\right) - G_e \right|^2$ minimale.

Quelle sont les valeurs des a_i, b_j qui donnent ce résultat ?